ΜΟΥΛΟΓΙΑΝΝΗΣ ΛΕΩΝΙΔΑΣ
3ο ΓΕ.Λ. ΣΤΑΥΡΟΥΠΟΛΗΣ

ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ

1) Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία η συνάρτηση
f(x)=$\left|x^2-1\right|$

2) Για να αποδεικνύω ανισοτικές σχέσεις
Αν για τις f ,g ισχύει f(o)=g(o) και $f'(x) \succ g'(x)$ $\forall x \in R$
Δείξτε ότι i) $f(x) \prec g(x)$ $\forall x \in (-\infty,0)$
ii) $f(x) \succ g(x)$ $\forall x \in (0,+\infty)$

3) Για να βρίσκω το πεδίο τιμών μιας συνάρτησης
Δίνεται η $f(x)=e^{x+1}+ex-2$
i)Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία
ii) Να βρείτε το σύνολο τιμών
ιιι) Δείξτε ότι η f(x)=0 έχει ακριβώς μια λύση στο R

4) Για να αποδεικνύω την μοναδικότητα ρίζας
Δείξτε ότι
i)$e^x-x+1 \succ 0$
ιι) $2e^x+2x=x^2+2$ έχει ακριβώς μια ρίζα την x=0

5) Για να λύνουμε ανισώσεις
Αν $f(x)=\alpha^x-x$ $0 \prec \alpha \prec 1$
ι)Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία
ιι) Να λυθεί η ανίσωση
$$a^{x^2-4}-a^{x-2}<(x^2-4)-(x-2)$$
ΑΣΚΗΣΕΙΣ
1) Έστω f, g, παραγωγίσιμες με Α=[0,+∞) για τις οποίες ισχύει
$f'(x)=g'(x)+\eta\mu^2x+e^x$ για κάθε $\chi \in [0,+\infty)$
Δείξτε ότι $f(0)+g(x) \prec g(o)+f(x)$ για κάθε $x \in (0,+\infty)$
2) Δείξτε ότι η εξίσωση $x=1998^{e-x}$ έχει ακριβώς μια λύση στο (1,+∞).
3) Δίνεται η $f(x)=\eta\mu x-x+\frac{x^3}{3}$ με x>0.Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία.
4) Δίνεται η $f(x)=e^x+xe^x-1$ $x \geq 0$

i) Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία.

ii) Να δείξτε ότι $1+x<e^x-1$ $x\geq0$

5) Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=e^x$ και $g(x)=x+1$.
Δείξτε ότι έχουν ένα μόνο κοινό σημείο

6) Δείξτε ότι η συνx=x έχει μοναδική λύση στο (0, π).

7) Έστω $f(x)=x^{1999}+3x-4$ $x\in R$
i) Δείξτε ότι f(x)=0 έχει ακριβώς μία λύση την x=1
ii) Βρείτε το πρόσημο της f(x).

8) Έστω $H(x)=e^x+ex-2$
i) Μονοτονία και σύνολο τιμών
ιι)Δείξτε ότι η f(x)=0 έχει ακριβώς μια λύση στο R

9) Έστω $G(x)=x-\frac{x^2}{2}+ hmx$.Δείξτε ότι η G΄(x)=0 έχει ακριβώς μια λύση στο
$[0\frac{p}{2}]$

10) Έστω $H(x)=συνx-x^2+πx$, $x\in[0,π]$.Δείξτε ότι η H΄(x)=0 έχει ακριβώς μια λύση στο (0,π).

11) Να λυθούν οι εξισώσεις
i) $e^x+e^{2x}=2$
ii) x+lnx=1
iii) x+συνx=1

12) Βρείτε το σύνολο τιμών των συναρτήσεων
α) $f(x)=x^5+2x^3+x-1$, $x\in[0,1]$
β) $f(x)=\frac{\ln x}{x}$ $x\in[e,3]$
γ) f(x)=x-lnx $x\in(0,10)$

13) Έστω $f(x)=x^{\frac{1}{x}}$

i)Μονοτονία
ιι) αν α>β>e ,να δείξτε ότι $α^β<β^α$.

Μονοτονία - Ακρότατα συνάρτησης

1. Δίνεται η συνάρτηση: $(χ) = χ^3 + 2χ-2ημχ$, $χ \in R$

α. Να βρεθεί η τρίτη παράγωγος της f.

β. Να βρεθούν τα πρόσημα των συναρτήσεων; f, f', f'', $f^{(3)}$,
όταν χ < 0

2. Δίνονται οι συναρτήσεις f(χ) = $-e^x+x$ και g(χ)=$χ^3+6x$. Να αποδείξετε ότι, αν
$χ \in [-1,2]$, είναι f(χ)<g(χ).

3. Να βρείτε τα α, β, γ ε R., ώστε η συνάρτηση $f(x) = αx^3 + βx^2 + γx + 1$ να παρουσιάζει στο
$x_1 = 1$ τοπικό ελάχιστο, το $x_2 = -\frac{1}{2}$ να είναι θέση σημείου καμπής και η εφαπτομένη της
C_f στο $χ_3 = 0$ να είναι κάθετη της ευθείας ε : χ -12ψ = 0 .

4. α) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 5x + 6 & x \le 1 \\ 2\sqrt{x^2+3} & x > 1 \end{cases}$ είναι

παραγωγίσιμηστο $x_{0=1}$

β. Έστω η συνάρτηση f με: $f(x) - 3x^3 - αx^2 + βx - 3$, όπου α, β ε R..

Αν η f έχει τοπικά ακρότατα στο $x_1 = 1$ και $x_2 = -\frac{5}{9}$, να βρεθούν οι αριθμοί α και β.

5. Έστω δύο συναρτήσεις f ,g με κοινό πεδίο ορισμού ένα διάστημα Δ, για τις οποίες υποθέτουμε ότι:

i. είναι δύο φορές παραγωγίσιμες στο Δ
ii. .$f'' = g''$
iii. Ο $\in Δ$ **και f(0) = g(0).**

Να δειχθεί οτι:
α. Για κάθε χ ε Δ ισχύει f (x)—g(x) = cx , όπου c ε Δ .
β. Αν η f(χ) = 0 έχει δύο ρίζες ετερόσημες $ρ_1$ $ρ_2$, τότε η g(χ) = 0 έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα [ρ,, $ρ_2$],

7 α) Για κάθε x>1 να δείξτε ότι $\ln x > 1 - \frac{1}{x}$

β) Αν φ(x)=$\frac{\ln x}{x-1}$, x>1 να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία

γ) Αν (κ-1)lnl =(l-1)lnk και κ,l >1 τότε κ=l

δ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της φ(x)

8 α) Αν $\varphi(x)=\alpha^x+4x$ με $\alpha>1$, να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία
β) Για ποιες τιμές του πραγματικού λ ισχύει:
$(\alpha^{\lambda})^2-\alpha^{\lambda+2}+4\lambda^2-4\lambda-8>0$.

9 Να αποδείξτε ότι
α) $e^x > x-1 \quad \forall x \in R$
β) $\sigma\upsilon\nu x > 1-\frac{x^2}{2}, x>0$
γ) $\eta\mu x < 2x, x>0$
δ) $\varepsilon\varphi x > x, \quad x \in (0, \frac{\pi}{2})$
ε) $\eta\mu x - x\sigma\upsilon\nu x > 0, \quad x \in (0, \frac{\pi}{2})$

10) Δίνεται η f ορισμένη στο $[0,+\infty)$ τρεις φορές παραγωγίσιμη και ισχύει: $f'''(x)>0$ για κάθε $x \in [0,+\infty)$.Δείξτε ότι:
$f(x) \geq f(0)+x f'(0)+\frac{x^2}{2}f''(0)$

11 Βρείτε το σύνολο τιμών των συναρτήσεων:
α) $f(x)=x^5+2x^3+x-1 \quad x \in [0,1]$
β) $g(x)=\frac{\ln x}{x}, x \in [e,3]$
γ) $h(x)=x-\ln x, \ x \in (0,1)$

12. Έστω f,g συνεχείς στο $[1,+\infty)$ με $f(1)=g(1)$ και
$x f'(x)-f(x)<x^2 g'(x) \quad \forall x \in (1,+\infty)$. Δείξτε ότι:
α) η $h(x)=\frac{f(x)}{x}-g(x)$ είναι γνήσια φθίνουσα στο $[1,+\infty)$
β) ισχύει $f(x)< x.\ g(x) \quad \forall x>1$

13) 1) Δείξτε ότι $\forall x \succ 0$ ισχύει $x^2-2\ln x-1 \geq 0$
2) Αν $f(x)=x+\frac{\ln x}{x}, x \succ 0$ δείξτε ότι
α) f(x) γνήσια αύξουσα
β) Η ευθεία ψ=χ είναι ασύμπτωτη της f(x)
γ) βρείτε σημείο της C_f ώστε η εφαπτομένη στο σημείο αυτό να είναι προς την ασύμπτωτη
δ) η $f(x)=0$ έχει ακριβώς μια λύση στο $(\frac{1}{2},1)$