

## ΑΚΡΟΤΑΤΑ

### ΘΕΜΑ 1

Να βρείτε τα τοπικά ακρότατα των συναρτήσεων

i)  $f(x) = x\sqrt{1-x^2}$

ii)  $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 9}{x^2 - 4}$

iii)  $f(x) = x^2 \ln x$

iv)  $f(x) = x^{\ln x}$

### ΘΕΜΑ 2

Ομοίως των συναρτήσεων

i)  $f(x) = |x^2 - 4x|$

ii)  $f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x - 16, x < 3 \\ 5 - \sqrt{x^2 - 9}, x \geq 3 \end{cases}$

### ΘΕΜΑ 3

Να δείξετε ότι

i)  $\ln(x+1) \leq x$

ii)  $e^{x-1} \geq x$

### ΘΕΜΑ 4

Να δείξετε ότι

i)  $\forall x > 0 \ln x \leq x - 1$

ii) Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία η συνάρτηση

$$g(x) = \frac{x \ln x}{x-1}$$

### ΘΕΜΑ 5

Αν η  $f(x)$  είναι παραγωγίσιμη στο  $[1, e]$  και  $0 < f(x) < 1$  και  $f'(x) \geq 0$ .  
Δείξτε ότι υπάρχει μοναδικό  $\chi_0 \in (1, e)$  τέτοιο ώστε  $f(\chi_0) + \chi_0 \ln \chi_0 = \chi_0$ .

### ΘΕΜΑ 6

i) Δείξτε ότι  $e^x - x + 1 > 0$

ii) Η εξίσωση  $2e^x + 2x = x^2 + 2$  έχει ακριβώς μία λύση την  $\chi_0 = 0$ .

### ΘΕΜΑ 7

Για κάθε  $x > 1$  να δείξετε ότι

$$\ln x \geq 1 - \frac{1}{x}$$

### ΘΕΜΑ 8

Αν η  $f(x)$  είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  και ισχύει  $f'(x) > f''(x)$  και η  $f(x)$  παρουσιάζει στο  $\chi_0$  τοπικό ακρότατο και  $f(0) = 0$  δείξτε ότι

i)  $f(x) < f'(x) \quad \forall x \in (-\infty, 0)$

ii)  $f(x) > f'(x) \quad \forall x \in (0, +\infty)$ .

### ΘΕΜΑ 9

Δίνεται η  $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$

Δείξτε ότι  $\forall x \in (0, +\infty)$  ισχύει  $x^x \geq e^{x-1}$ .

### ΘΕΜΑ 10

Έστω η  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(x) = \frac{2 + \ln x}{x}$

α) Μονοτονία, ακρότατα

β) Δείξτε ότι  $\ln x \leq ex - 2, \forall x > 0$

### ΘΕΜΑ 11

Να αποδειχτούν οι

i)  $x^x \geq e^{x-1} \forall x \in (0, +\infty)$

ii)  $\forall x \in \mathbb{R}, (x^2 + 1)^{x^2+1} \geq e^{x^2}$

### ΘΕΜΑ 12

Έστω  $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$  με  $x \geq 3$

i) Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα

ii) Δείξτε ότι  $f(x) > \frac{x^3}{2}$ .

### ΘΕΜΑ 13

Δίνονται οι  $f(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$  και  $g(x) = \frac{\ln x}{x}$

Δείξτε ότι  $g'(x) = f(x) \geq -\frac{1}{2e^3} \forall x > 0$ .

### ΘΕΜΑ 14

Δίνεται η  $f(x) = x - e \ln x$

i) Μονοτονία ακρότατα

ii)  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$

iii) Δείξτε ότι  $e \ln x \leq x \forall x > 0$

iv) Να δείξετε ότι η εξίσωση  $f(x) = 0$  δεν έχει λύση στο  $[0, +\infty)$

### ΘΕΜΑ 15

Δίνεται η  $f(x) = \frac{(\ln x)^2}{x}$

i) Μονοτονία, ακρότατα

ii)  $\forall x > 1$  δείξτε ότι  $e^2 \cdot (\ln x)^2 \leq 4x$

**ΘΕΜΑ 16**

Έστω  $f(x) = \ln x + \frac{1}{x} - e + 1 \quad x > 0$

Αν  $0 < x < 1$  τότε  $\forall x \geq \frac{1}{e} \quad f(x) \leq 0$

**ΘΕΜΑ 17**

Έστω  $f(x) = \frac{\ln x}{x^2} \quad x > 0$

- i) Μονοτονία ακρότατα
- ii) Δείξτε ότι  $x^2 \geq 2e \ln x \quad \forall x > 0$ .

**ΘΕΜΑ 18**

Έστω  $f(x) = x - \ln x$

- i) Μονοτονία ακρότατα
- ii) Δείξτε ότι  $\ln x \leq x - 1 \quad \forall x > 0$

**ΘΕΜΑ 19**

Έστω  $f$  παραγωγίσιμη με  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει  $[f(x)]^3 + x^3 = 3xf(x)$  και στο  $x_0 > 0$  παρουσιάζει τοπικό ακρότατο. Βρείτε το  $x_0$ .

**ΘΕΜΑ 20**

Δείξτε ότι  $e^{x-1} - \ln x \geq 1 \quad \forall x > 0$

**ΘΕΜΑ 21** Έστω η  $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & x < 1 \\ \frac{\ln x}{x^2}, & x \geq 1 \end{cases}$

- α) Να μελετηθεί ως προς συνέχεια
- β) Να εξεταστεί αν ορίζεται η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο  $(1, f(1))$
- γ) Να βρεθούν τα κρίσιμα σημεία της  $f$

**ΘΕΜΑ 22** Α) Να δείξετε ότι κάθε  $\chi \in \mathbb{R}^{\square}$  ισχύει  $\chi \ln \chi \geq \chi - 1$

Β) Αν  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^{\square}$  και  $\alpha + \beta + \gamma = 3$  δείξτε ότι  $\alpha^{\alpha} \cdot \beta^{\beta} \cdot \gamma^{\gamma} \geq 1$   
[  $\alpha \ln \alpha \geq \alpha - 1, \beta \ln \beta \geq \beta - 1, \gamma \ln \gamma \geq \gamma - 1$  και προσθέτω κατά μέλη ]