ΑΣΚΗΣΕΙΣ-ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

1) Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και τα σημεία Μ, Ν τέτοια ώστε να είναι: $\overrightarrow{ΔΜ} = \overrightarrow{ΑΔ}$ και $\overrightarrow{ΒΝ} = \overrightarrow{ΑΒ}$. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Μ, Γ και Ν είναι συνευθειακά.

1α) Αν $\overrightarrow{ΟΑ} = 2\vec{α} + 3\vec{β} - 5\vec{γ}$, $\overrightarrow{ΟΒ} = 4\vec{α} - \vec{β} + 6\vec{γ}$, $\overrightarrow{ΟΓ} = -2\vec{α} + 11\vec{β} - 27\vec{γ}$ τότε να δείξετε ότι τα σημεία Α , Β , Γ είναι συνευθειακά .

1β) Αν $\overrightarrow{ΑΒ} = (2,2)$, $\overrightarrow{ΑΓ} = (3,1)$, $\overrightarrow{ΑΔ} = (1,3)$ να εξετάσετε αν τα Β,Γ,Δ, είναι συνευθειακά. **(ΕΜΕ)**

1γ) Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με Α=Β=90^o και ονομάζουμε Μ το μέσο του ΑΒ. ΝΑ δείξετε ότι:
$\overrightarrow{ΜΔ} + \overrightarrow{ΜΓ} = \overrightarrow{ΑΔ} + \overrightarrow{ΒΓ}$

$\overrightarrow{ΜΔ} \cdot \overrightarrow{ΜΓ} = |\overrightarrow{ΑΔ}| \cdot |\overrightarrow{ΒΓ}| - |\overrightarrow{ΜΑ}|^2$.

1δ) Έστω σημείο Μ σε κύκλο με κέντρο Ο και διάμετρο ΑΒ. Παίρνουμε τα διανύσματα $\overrightarrow{ΜΓ} = \overrightarrow{ΑΜ}$ και $\overrightarrow{ΜΔ} = \overrightarrow{ΒΜ}$. Να αποδείξετε ότι ο κύκλος (Α,ΑΒ) περνάει από το Δ.

1ε) Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και σημείο Ε τέτοιο ώστε $\overrightarrow{ΔΕ} = \overrightarrow{ΔΑ} - \overrightarrow{ΒΓ}$. Αν επιπλέον ισχύει $|\overrightarrow{ΒΓ}| = |\overrightarrow{ΑΓ}|$ τότε να αποδείξετε ότι $|\overrightarrow{ΕΓ}|^2 + |\overrightarrow{ΑΒ}|^2 = 4|\overrightarrow{ΕΒ}|^2$.

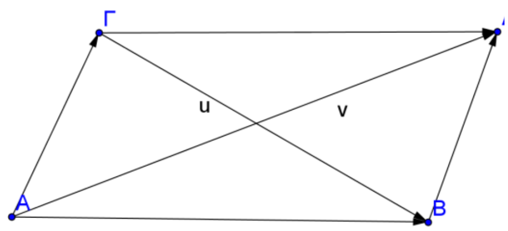
1στ) Δίνονται τα διανύσματα $\vec{u}$ = (- 2, 3) και $\vec{v}$ = (4, - 3). Να βρείτε το διάνυσμα $\vec{w}$ ώστε να είναι $\vec{w} \perp (3\vec{v} - 5\vec{u})$.

1ζ) Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{α}$ =(x+1, x^2+2x+1) $\vec{β}$ =(x-1, x^2-1) είναι παράλληλα για x≠±1
**Πότε τα δύο διανύσματα είναι ομόρροπα;

1η) Αν Ο είναι η τομή των διαγωνίων ενός παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ , να δείξετε ότι για κάθε σημείο Μ του επιπέδου ισχύει $\overrightarrow{ΜΑ} + \overrightarrow{ΜΒ} + \overrightarrow{ΜΓ} + \overrightarrow{ΜΔ} = 4\overrightarrow{ΜΟ}$

ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ

1η) Να υπολογίσετε τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{α} = \overrightarrow{ΑΓ}, \text{και} \vec{β} = \overrightarrow{ΑΒ}$ στο διπλανό σχήμα, αν είναι γνωστό ότι οι διαγώνιοι $\vec{u} = \overrightarrow{ΓΒ}, \vec{v} = \overrightarrow{ΑΔ}$ είναι
αντίστοιχα τα διανύσματα $\vec{u} = (0, -\sqrt{3}), \vec{v} = (2, \sqrt{3})$



2) Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων α=(0,3) και β=(λ,-3). Για ποια τιμή του λ τα διανύσματα είναι αντίρροπα;

2α) ΕΜΕ Αν $\vec{α}$= 10,2 , $\vec{β}$= 3,8 , $\vec{γ}$= –2,2 να υπολογίσετε τα
$\vec{α} \cdot \vec{β}$, $\vec{α} \cdot \vec{γ}$, $\vec{β} \cdot \vec{γ}$, $\vec{α} \cdot \vec{β}\ \vec{γ}$, $\vec{γ}\ \vec{α} \cdot \vec{β}$, $|\vec{α} \cdot \vec{β}\ \vec{γ}|$, $|\vec{γ}\ \vec{γ} \cdot \vec{β}|$

2β) ΕΜΕ Αν Ο σημείο στο επίπεδο του τριγώνου ΑΒΓ ώστε $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{ON}\cdot\overrightarrow{\Gamma B}=\overrightarrow{OK}\cdot\overrightarrow{\Gamma A}$ όπου Μ,Κ,Ν μέσα των ΑΒ, ΓΒ,ΓΑ αντίστοιχα, να δειχτεί ότι το Ο είναι περίκεντρο του ΑΒΓ

3) Στο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ το Μ είναι μέσο της ΑΒ. Αν $\overrightarrow{A\Delta}=\vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{\Delta\Gamma}=\vec{\beta}$ να εκφράσετε τα $\overrightarrow{\Delta M}$ και $\overrightarrow{M\Gamma}$σαν συνάρτηση των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ και να αποδείξετε ότι $2|\vec{\alpha}|=|\vec{\beta}|$ όταν τα $\overrightarrow{\Delta M}$ και $\overrightarrow{M\Gamma}$ είναι κάθετα μεταξύ τους.

4α)Αν $|\vec{\alpha}| = 2$, $|\vec{\beta}| = 2\sqrt{2}$, $(\widehat{\alpha,\beta}) = 45°$ να βρείτε τη γωνία $(\vec{\beta}-\vec{\alpha}, \vec{\alpha})$.

4β) ΟΕΦΕ*2012 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ για τα οποία ισχύει $|\vec{\alpha}|=\sqrt{2}, |\vec{\beta}|=1$ και $\vec{\alpha}+\vec{\beta} \perp 2\vec{\alpha}-3\vec{\beta}$.

Β1. Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=1$. **Μονάδες 5**

Β2. Να βρείτε τη γωνία των διανυσμάτων $\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}$. **Μονάδες 5**

Β3. Να αποδείξετε ότι: $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|=|2\vec{\alpha}-3\vec{\beta}|$ **Μονάδες 7**

Β4. Να βρείτε την προβολή του διανύσματος $2\vec{\alpha}-3\vec{\beta}$ στο διάνυσμα $\vec{\alpha}$ **. Μονάδες 8**

5) Αν $\vec{\alpha} = (1,0)$ και $\vec{\beta} = (-1,3)$ να αναλύσετε το διάνυσμα $\vec{\beta}$ σε δύο κάθετες συνιστώσες από τις οποίες η μία να είναι παράλληλη στο $\vec{\alpha}$.

6α) Να βρείτε το λ ώστε τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (\lambda, \frac{1}{\lambda})$ και $\vec{\beta}= (-1, \frac{8}{\lambda})$ να είναι κάθετα.

6β) Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{\alpha} =(|x|,|y|)$ και $\vec{\beta} =(\lambda x, \lambda y)$ είναι παράλληλα αν λ>0 και οι $x,y \in R$ είναι ομόσημοι.

Αν $\lambda\neq 0$,$x\neq 0$,$y\neq 0$ να αποδείξετε ότι το $\vec{\alpha}$ είναι κάθετο στο $\vec{\beta}$ αν και μόνο αν x=-y. Να ερμηνεύσετε γεωμετρικά το αποτέλεσμα.

7)i) Οι ποσότητες $|\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}|$ *και* $|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|$ είναι μέτρο διανύσματος ή απόλυτες τιμές;

ii) Κάποιος έλυσε την παρακάτω σχέση ως εξής:

$$\sigma\upsilon\nu\,\widehat{\vec{u},\vec{v}}=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}=\frac{(2\vec{\alpha}+4\vec{\beta})\cdot(\vec{\alpha}-\vec{\beta})}{|2\vec{\alpha}+4\vec{\beta}|\cdot|\vec{\alpha}-\vec{\beta}|}=\frac{(2\vec{\alpha}+4\vec{\beta})\cdot(\vec{\alpha}-\vec{\beta})}{|(2\vec{\alpha}+4\vec{\beta})\cdot(\vec{\alpha}-\vec{\beta})|}=\pm 1$$

. Γιατί η σχέση αυτή είναι προφανώς λάθος;

iii) Να αποδείξετε ότι δεν ισχύει γενικά η ισότητα $|\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}|=|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|$ παρά μόνο αν τα διανύσματα είναι συγγραμμικά.

iv) Πότε ισχύει $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|=|\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}|$ και πότε $\big||\vec{\alpha}|-|\vec{\beta}|\big|=|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|$;

7α) Έστω δύο διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ που έχουν μέτρα $|\vec{\alpha}|=\sqrt{3}$ και $|\vec{\beta}|=1$ και σχηματίζουν γωνία $\varphi=\frac{\pi}{6}$

i) Να βρεθεί το $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$ **ii)** Αν $\vec{x}=\vec{\alpha}+\vec{\beta}$, $\vec{y}=\vec{\alpha}-\vec{\beta}$ να βρεθεί το $|\vec{x}|$ και το $|\vec{y}|$ και η γωνία μεταξύ των $\vec{x}$, $\vec{y}$

8) Αν $\vec{\alpha} = (1,0)$ και $\vec{\beta} = (-1,3)$ να αναλύσετε το διάνυσμα $\vec{\beta}$ σε δύο κάθετες συνιστώσες από τις οποίες η μία να είναι παράλληλη στο $\vec{\alpha}$.

8α) Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(3,5)$, $\vec{\beta}=(2,-1)$. Να βρείτε την προβολή του $\vec{\beta}$ στο $\vec{\alpha}$ και να το αναλύσετε σε δύο κάθετες συνιστώσες από τις οποίες η μία να είναι κάθετη στο $\vec{\alpha}$

8β) Αν $\vec{\alpha}=(2,-4)$ και $\vec{\beta}=(-8,5)$ να αναλύσετε το $\vec{\beta}$ σε δύο κάθετες συνιστώσες, από τις οποίες η μία να είναι παράλληλη προς το $\vec{\alpha}$

9) (ΚΕΕ) Δίνονται τα σημεία Α(3,2) και Β(7,-4). Να βρεθεί σημείο Μ του x΄x ώστε:
i) το τρίγωνο ΜΑΒ να είναι ισοσκελές με κορυφή το Μ
ii) ορθογώνιο στο Μ

10) Δίνονται τα σημεία, $B\ 2\mu+1,\lambda-2$, $\Gamma\ 4,0$ και $M\ 3,2$, όπου M είναι το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος AB και $\lambda,\mu\in R$. Αν δίνεται ότι $\mu=2$ και $\lambda=5$ και τα διανύσματα $\overrightarrow{\Gamma M}$ και $\overrightarrow{AB}$ είναι κάθετα να αποδείξετε ότι οι συντεταγμένες του Α πληρούν τη σχέση (2y-1,y).

11) Για τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ δίνεται ότι $|\vec{\alpha}| = 1$, $|\vec{\beta}| = 2$ και Έστω τα διανύσματα $\vec{u} = 2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}$, $\vec{v} = \vec{\alpha} - 2\vec{\beta}$. Να υπολογίσετε:

α. το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$ Μονάδες 5

β. τα μέτρα $|\vec{u}|$, $|\vec{v}|$ των διανυσμάτων $\vec{u}$ και $\vec{v}$ Μονάδες 8

γ. το εσωτερικό γινόμενο $\vec{u}\cdot\vec{v}$ Μονάδες 7

δ. το συνημίτονο της γωνίας των διανυσμάτων $\vec{u}$ και $\vec{v}$. Μονάδες 5

****12) βιβλιο** Να υπολογίσετε τα μήκη των διαγωνίων ενός παραλληλογράμμου που κατασκευάζεται με τα διανύσματα $5\vec{\alpha}+2\vec{\beta}$ και $\vec{\alpha}-3\vec{\beta}$, αν $|\vec{\alpha}|=2\sqrt{2}$, $|\vec{\beta}|=3$ και συν $\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

***13α)** Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Αν Μ και Ν είναι τα μέσα των πλευρών ΒΓ και ΓΑ να αποδείξετε ότι: $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$

***13β)** Έστω ένα παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και Β΄,Δ΄ οι προβολές του Γ στις ΑΒ και ΑΔ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι

$$\overrightarrow{A\Delta}\cdot\overrightarrow{A\Delta'}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB'}=\overrightarrow{A\Gamma}^2$$

***13γ)** Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και κύκλος κέντρου Ο που διέρχεται από την κορυφή Α και τέμνει τις ευθείες ΑΒ, ΑΓ και ΑΔ στα Β΄,Γ΄,Δ΄ αντιστοίχως. Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{\Delta A'}\cdot\overrightarrow{\Delta B}+\overrightarrow{\Delta\Gamma'}\cdot\overrightarrow{\Delta B}=\overrightarrow{\Delta B}^2$
$\overrightarrow{A\Delta}\cdot\overrightarrow{A\Delta'}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB'}=\overrightarrow{A\Gamma}\cdot\overrightarrow{A\Gamma'}$

13δ) Αν σε ένα ορθογώνιο ΑΒΓΔ $\overrightarrow{\Delta A'}$, $\overrightarrow{\Delta\Gamma'}$ είναι οι προβολές των $\overrightarrow{\Delta A}$, $\overrightarrow{\Delta\Gamma}$ στο $\overrightarrow{\Delta B}$ να αποδείξετε ότι.
ii) Κάποιος έλυσε την παραπάνω άσκηση απλά διαγράφοντας το $\overrightarrow{\Delta B}$ από την εξίσωση που δίνεται. Να εξηγήσετε γιατί η λύση που έδωσε είναι λανθασμένη.

13ε) Να αποδείξετε ότι σε κάθε ρόμβο ΑΒΓΔ ισχύει $4\overrightarrow{A\Delta}^2=\overrightarrow{A\Gamma}^2+\overrightarrow{B\Delta}^2$. Αν επιπλέον $\overrightarrow{A\Gamma'}$, $\overrightarrow{B\Delta'}$ είναι οι προβολές των $\overrightarrow{A\Gamma}$, $\overrightarrow{B\Delta}$ στις ΑΔ και ΒΓ αντίστοιχα να αποδείξετε ότι $2\overrightarrow{A\Delta}=\overrightarrow{A\Gamma'}+\overrightarrow{B\Delta'}$

14)Δίνονται τα μη συγγραμικά διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$. Αν $|\vec{\alpha}|=|\vec{\beta}|$ να βάλετε σε κύκλο τη σωστή απάντηση :
$\vec{x}=\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ είναι συγγραμικό διάνυσμα της διχοτόμου της γωνίας

Α: $(\vec{\alpha},-\vec{\beta})$ Β: $(-\vec{\alpha},\vec{\beta})$ Γ: $(\vec{\alpha},\vec{\beta})$ Δ: $(\vec{\alpha},\vec{i}\,)$ Ε:$(\vec{\alpha}$,x΄x)

Το $\vec{y}=\vec{\alpha}-\vec{\beta}$ είναι διάνυσμα συγγραμικό της διχοτόμου της γωνίας

Α: $(\vec{\alpha},-\vec{\beta})$ Β: $(-\vec{\alpha},-\vec{\beta})$ Γ: $(\vec{\alpha},\vec{\beta})$ Δ: $(\vec{\beta},\vec{i}\,)$ Ε:$(\vec{\beta}$,x΄x)

14α) (ΕΜΕ) Ποια συνθήκη πρέπει να πληρούν τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ, ΑΔ, ΒΓ ώστε τα διανύσματα $\overrightarrow{M\Gamma},\overrightarrow{M\Delta}$ να σχηματίζουν γωνία: α) οξεία β) ορθή γ) αμβλεία ;

15) Να αποδείξετε ότι ισχύει $\left|\vec{\alpha}\right| = \left|\pi\rho o\beta_{\vec{\beta}}\vec{\alpha}\right| \Leftrightarrow \vec{\alpha} // \vec{\beta}$ Ποια η γεωμετρική ερμηνεία της ισότητας;.

16) Να αποδείξετε ότι για κάθε εσωτερικό σημείο Ο ενός ορθογωνίου ΑΒΓΔ ισχύουν

i) $\overrightarrow{OA}^2 + \overrightarrow{O\Gamma}^2 = \overrightarrow{OB}^2 + \overrightarrow{O\Delta}^2$ **ii)** $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{O\Gamma} = \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{O\Delta}$

17) Αν $\vec{\alpha} = 0, -\sqrt{2}$, $\vec{\beta} = 1, -1$ να βρείτε **α)** το $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ **β)** το $3\vec{\alpha} - \vec{\beta} \quad \vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$ **γ)** την γωνία των $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$

18) (**ΚΕΕ**) Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ όπου $\lambda\vec{\alpha} + \kappa\vec{\beta} \perp \kappa\vec{\alpha} - 2\lambda\vec{\beta}$ για κάθε $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0$. Αν $\left|\vec{\alpha}\right| = 2$ να βρεθεί το $\left|\vec{\beta}\right|$

19) (ΚΕΕ) Αν ισχύει $\left|\vec{\alpha}\right| = \left|\vec{\beta}\right| = \left|\vec{\alpha} + \vec{\beta}\right|$ να δείξετε ότι $\left|\vec{\alpha} - \vec{\beta}\right| = \left|\vec{\alpha}\right| \cdot \sqrt{3}$

20) (ΚΕΕ) Αν ισχύουν: $\vec{\beta} \neq \vec{0}$, $\vec{\alpha} = \vec{p} + \vec{q}$, $\vec{p} // \vec{\beta}$ και $\vec{q} \perp \vec{\beta}$ να αποδειχθεί ότι θα ισχύουν και οι σχέσεις:

α) $\vec{p} = \dfrac{\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}}{\vec{\beta}^2} \cdot \vec{\beta}$ β) $\vec{q} = \vec{\alpha} - \dfrac{\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}}{\vec{\beta}^2} \cdot \vec{\beta}$

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 2012

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΣΩΣΤΟΥ-ΛΑΘΟΥΣ & ΠΟΛΛΑΠΛΗΣ ΕΠΙΛΟΓΗΣ

1) $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$ αν και μόνο αν $\vec{\alpha} \,//\, \vec{\beta}$ **Σ Λ**

2) Αν ισχύει $|\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}| = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$ τότε τα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ είναι στην ίδια ευθεία. **Σ Λ**

1) Δεν ισχύει $|\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}| = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$ για κανένα διανύσμα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ **Σ Λ**

2) $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| \Rightarrow |\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}| = \vec{\beta}^2$ **Σ Λ**

3) Ισχύει ότι $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=0$ **Σ Λ**

4) Αν $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|=|\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}|$ τότε τα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ είναι ομόρροπα **Σ Λ**

3) $|\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}| \leq |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$ για όλα τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$. **Σ Λ**

1) Αν $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|=|\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}|$ τότε τα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ είναι αντίρροπα **Σ Λ**

4) Αν δυο διανύσματα είναι παράλληλα δεν γίνεται $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=0$ **Σ Λ**

4) Ισχύει ότι $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta} \Leftrightarrow |\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}|=0$. **Σ Λ**

5) Αν $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}$ ισχύει $\pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}^{\vec{\beta}}\cdot\vec{\alpha}=0$. **Σ Λ**

3) Ισχύει $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=\vec{\alpha}\cdot\pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}^{\vec{\beta}}$ **Σ Λ**

5) Η προβολή ενός διανύσματος $\vec{\alpha}$ σε διάνυσμα $\vec{\beta}$ είναι διάνυσμα παράλληλο στο $\vec{\beta}$ **Σ Λ**

5) Αν $\vec{\alpha}=\ \alpha_1,\alpha_2$ και $\vec{\beta}=\ \beta_1,\beta_2$ τότε $\alpha_1\cdot\beta_1-\alpha_2\cdot\beta_2=|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|\cdot\sigma\upsilon\nu\ \widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}$ **Σ Λ**

6) Αν $\vec{\alpha}=\ \alpha_1,\alpha_2$ και $\vec{\beta}=\ \beta_1,\beta_2$ τότε $\alpha_1\cdot\beta_1+\alpha_2\cdot\beta_2=|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|\cdot\sigma\upsilon\nu\ \widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}$ **Σ Λ**

6) Για τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma},\vec{\delta}$ ισχύει $\vec{\alpha}+\vec{\beta}\ \cdot\ \vec{\gamma}+\vec{\delta}\ =\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}+\vec{\beta}\cdot\vec{\delta}$ **Σ Λ**

7) Να πείτε ποια από τις παρακάτω προτάσεις **δεν** μπορεί να είναι σωστή για **κανένα** διάνυσμα $\vec{\alpha}$ ή /και $\vec{\beta}$

i) $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=-|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|$ **ii)** $\pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}^{\vec{\beta}}=\vec{\alpha}$ **iii)** $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=0$ **iv)** $\pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}^{\vec{\beta}}\cdot\vec{\alpha}=\vec{0}$ **v)** $\pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}^{\vec{\beta}}=\vec{\beta}$ **2 βαθμοί**

7) Να πείτε ποια από τις παρακάτω προτάσεις **δεν** μπορεί να είναι σωστή για **κανένα** διάνυσμα $\vec{\alpha}$ ή /και $\vec{\beta}$

i) $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$ **ii)** $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=0$ **iii)** $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=\vec{\alpha}$ **iv)** $\pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}^{\vec{\beta}}=\vec{\beta}$ **v)** $\pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}^{\vec{\beta}}=\vec{\alpha}$. **2 βαθμοί**

Να δικαιολογήσετε την απάντηση σας

7) Να πείτε ποια από τις παρακάτω προτάσεις **δεν** μπορεί να είναι σωστή για **κανένα** διάνυσμα $\vec{\alpha}$ ή /και $\vec{\beta}$

i) $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=-|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|$ **ii)** $\pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}^{\vec{\beta}}\cdot\vec{\alpha}=\vec{0}$ **iii)** $\pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}^{\vec{\beta}}=\vec{\alpha}$ **iv)** $\pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}^{\vec{\beta}}=\vec{\beta}$ **v)** $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=0$

8) Αν $\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\ =180^0$ και $|\vec{\beta}|=2|\vec{\alpha}|$ τότε

i) $\pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}^{\vec{\beta}}\cdot\vec{\alpha}=\vec{0}$ **ii)** $\pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}^{\vec{\beta}}=\vec{\beta}$ **iii)** $\pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}^{\vec{\beta}}\cdot\vec{\alpha}=0$ **iv)** $\pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}^{\vec{\beta}}=-2\vec{\alpha}$ **v)** $\pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}^{\vec{\beta}}=\vec{\alpha}$

8) Αν $\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\ =60^0$ και $|\vec{\beta}|=2|\vec{\alpha}|$ τότε

i) $\pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}^{\vec{\beta}}=-\vec{\alpha}$ **ii)** $\pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}^{\vec{\beta}}=\vec{\beta}$ **iii)** $\pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}^{\vec{\beta}}=\vec{\alpha}$ **iv)** $\pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}^{\vec{\beta}}\cdot\vec{\alpha}=0$ **v)** $\pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}^{\vec{\beta}}\cdot\vec{\alpha}=\vec{0}$

8) Αν $\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\ =120^0$ και $|\vec{\beta}|=2|\vec{\alpha}|$ τότε

i) $\pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}^{\vec{\beta}}\cdot\vec{\alpha}=\vec{0}$ **ii)** $\pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}^{\vec{\beta}}=\vec{\beta}$ **iii)** $\pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}^{\vec{\beta}}\cdot\vec{\alpha}=0$ **iv)** $\pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}^{\vec{\beta}}=-\vec{\alpha}$ **v)** $\pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}^{\vec{\beta}}=\vec{\alpha}$ **3 βαθμοί**

Να δικαιολογήσετε την απάντηση σας. Δίνεται συν120^0=- 1/2.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Αν $\vec{\alpha}$ = (1,0) και $\vec{\beta}$ = (-1,3) να αναλύσετε το διάνυσμα $\vec{\beta}$ σε δύο κάθετες συνιστώσες από τις οποίες η μία να είναι παράλληλη στο $\vec{\alpha}$. **5 βαθμοί**

2) Να υπολογίσετε τα μήκη των διαγωνίων ενός παραλληλογράμμου που κατασκευάζεται με τα διανύσματα $5\vec{\alpha}+2\vec{\beta}$ και $\vec{\alpha}-3\vec{\beta}$, αν $|\vec{\alpha}|=2\sqrt{2}$, $|\vec{\beta}|=3$ και συν $\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ **4 βαθμοί**

1) Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (3,5)$, $\vec{\beta} = (2,-1)$. Να βρείτε την προβολή του $\vec{\beta}$ στο $\vec{\alpha}$ και να το αναλύσετε σε δύο κάθετες συνιστώσες από τις οποίες η μία να είναι κάθετη στο $\vec{\alpha}$ **5 βαθμοί**

2) Για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ δίνεται ότι $|\vec{\alpha}| =1$, $|\vec{\beta}|=2$ και $συν\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=\frac{1}{2}$ Έστω τα διανύσματα

$\vec{u} = 2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}$, $\vec{v} = \vec{\alpha} - 2\vec{\beta}$. Να υπολογίσετε: **α.** το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ **β.** τα μέτρα $|\vec{u}|$, $|\vec{v}|$ των διανυσμάτων $\vec{u}$ και $\vec{v}$ **γ.** το εσωτερικό γινόμενο $\vec{u} \cdot \vec{v}$ **4 βαθμοί**

1) Αν $\vec{\alpha} = (2,-4)$ και $\vec{\beta} = (-8,5)$ να αναλύσετε το $\vec{\beta}$ σε δύο κάθετες συνιστώσες, από τις οποίες η μία να είναι παράλληλη προς το $\vec{\alpha}$ **5 βαθμοί**

2) Αν $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = 1$ και $συν\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=-\frac{1}{2}$, να υπολογίσετε το συνημίτονο της γωνίας των διανυσμάτων

$\vec{u} = 2\vec{\alpha} + 4\vec{\beta}$, $\vec{v} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$ **4 βαθμοί**

3) Να αποδείξετε ότι ισχύει $|\vec{\alpha}|=|προβ_{\vec{\beta}}\vec{\alpha}| \Leftrightarrow \vec{\alpha} \,//\, \vec{\beta}$ Ποια η γεωμετρική ερμηνεία της ισότητας; **1 βαθμός**